Analyse réelle

I. Borne supérieure, borne inférieure

1°) Définition

Déf : On appelle borne supérieure d'une partie A de $\mathbb{R}$ le plus petit des majorants de A, on la note $\sup A$. On appelle borne inférieure de A le plus grand des minorants de A, on la note $\inf A$.

Théorème :

Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée alors $\sup A$ existe dans $\mathbb{R}$.

Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée alors $\inf A$ existe dans $\mathbb{R}$.

Déf : Pour $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$, on pose $\sup_{\mathcal{D}} f = \sup f(\mathcal{D}) = \sup\{f(x)/\, x\in\mathcal{D}\}$.

Pour $(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on pose $\sup_{n\geq n_0}(u_n) = \sup\{u_n/\, n\geq n_0\}$.

2°) Propriétés calculatoires

Déf : Pour $A,B\subset\mathbb{R}$, on note $A+B=\{a+b/\, a\in A, b\in B\}$.

Prop : Si A et B sont non vides et majorées : $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

Si A et B sont non vides et minorée : $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$.

Déf : Pour $A\subset\mathbb{R}$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, on note $\lambda A=\{\lambda a/\, a\in A\}$.

Prop : Soit $\lambda\geq 0$.

Si A est non vide et majorée alors $\sup\lambda A=\lambda\sup A$.

Si A est non vide et minorée alors $\inf\lambda A=\lambda\inf A$.

3°) Extension à $\overline{\mathbb{R}}$.

Déf : Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

Si A n'est pas majorée alors on pose $\sup A=+\infty$.

Si A n'est pas minorée alors on pose $\inf A=-\infty$.

Si $A=\varnothing$, on pose $\sup A=-\infty$ et $\inf A=+\infty$.

Théorème :

Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ alors il existe deux suites (a_n) et (b_n) d'éléments de A telle que $a_n\to\inf A$ et $b_n\to\sup A$.

II. Limite

1°) Définitions quantifiées

Déf : Soit $f:I\to\mathbb{R}$ et a un élément de I ou une extrémité éventuellement infinie de I.

Cas $a\in\mathbb{R}$:

$f(x)\xrightarrow[x\to a]{}\ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\alpha>0,\forall x\in I,|x-a|\leq\alpha\Rightarrow|f(x)-\ell|\leq\varepsilon$,

$f(x)\xrightarrow[x\to a]{}+\infty \Leftrightarrow \forall M\in\mathbb{R},\exists\alpha>0,\forall x\in I,|x-a|\leq\alpha\Rightarrow f(x)\geq M$,

Cas $a=+\infty$:

$f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists A\in\mathbb{R},\forall x\in I,x\geq A\Rightarrow|f(x)-\ell|\leq\varepsilon$,

$f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty \Leftrightarrow \forall M\in\mathbb{R},\exists A\in\mathbb{R},\forall x\in I,x\geq A\Rightarrow f(x)\geq M$.

Théorème :

Toute fonction monotone sur $]a,b[$ admet des limites en a et b qui sont $\inf_{]a,b[} f$ et $\sup_{]a,b[} f$.

2°) Comparaison de fonctions

a) comparaisons de référence

Déf : $f=\underset{a}{o}(g)\Leftrightarrow f/g\underset{a}{\to}0$. On note encore $f\underset{a}{\ll}g$.

Quand $x \to +\infty$: $e^{-x} \ll \frac{1}{x^2} \ll \frac{1}{x} \ll \frac{1}{\ln x} \ll 1 \ll \ln x \ll \sqrt{x} \ll x \ll x^2 \ll e^x$.

Quand $x \to 0$: $x^2 \ll x \ll \sqrt{x} \ll \frac{1}{\ln x} \ll 1 \ll \ln x \ll \frac{1}{\sqrt{x}} \ll \frac{1}{x} \ll \frac{1}{x^2}$.

b) équivalents

$f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow f = g + \underset{a}{o}(g)$, f et g ont alors même limite et même signe au voisinage de a.

Prop : Si $f \underset{a}{\sim} g \to +\infty$ ou $\to 0^+$ alors $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$.

3°) Développement limités

Déf : Développement limité de f en a : $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$ au voisinage de a. Il y a unicité des coefficients.

4°) Développement asymptotiques

Déf : Développement asymptotique de f en a :
$f(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + \cdots + a_n g_n(x) + o(g_n(x))$ au voisinage de a avec $g_0, \ldots, g_n$ des fonctions « simples » telles que $g_n \ll g_{n-1} \ll \cdots \ll g_0$.

III. Continuité

Soit I un intervalle.

1°) Définition

Déf : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite continue en $a \in I$ ssi $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$.
Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite continue ssi elle l'est en tout $a \in I$.

2°) Théorèmes de continuité

Théorème :
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème :
Toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ est bornée et atteint ses bornes.

3°) Théorème de la bijection continue

Théorème :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone.
f réalise une bijection de I vers un intervalle J dont les extrémités sont les limites de f aux extrémités de I. De plus $f^{-1} : J \to I$ est continue et de même stricte monotonie que f.

IV. Dérivation

I et J désignent des intervalles non singuliers (contenant au moins deux points).

1°) Nombre dérivé

Déf : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite dérivable en $a \in I$ ssi $\frac{1}{h}\big(f(a+h) - f(a)\big)$ admet une limite finie quand $h \to 0$, limite notée $f'(a)$.

Prop : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.
Si $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$ (f' est alors continue en a).

Prop : Si $f : I \to \mathbb{R}$ admet un extremum en a point intérieur à I et si f y est dérivable alors $f'(a) = 0$.

2°) Théorème des accroissements finis

Théorème :

Soit $a<b\in\mathbb{R}$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

Si $f(a)=f(b)$ alors $\exists c\in]a,b[, f'(c)=0$.

Théorème :

Soit $a<b\in\mathbb{R}$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

Il existe $c\in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Cor : Soit $f:I\to\mathbb{R}$ dérivable.

$\forall x\in I, |f'(x)|\leq M \Leftrightarrow f$ est M lipschitzienne.

3°) Difféomorphisme

Théorème :

Soit $\varphi:I\to J$ une bijection continue et $a\in I$. Si φ est dérivable en a et $\varphi'(a)\neq 0$ alors φ^{-1} est dérivable en $b=\varphi(a)$ et $(\varphi^{-1})'(b)=\dfrac{1}{\varphi'(a)}$.

Déf : Pour $k\in\mathbb{N}^*\cup\{\infty\}$, on appelle $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de I vers J toute application $\varphi:I\to J$ bijective telle que φ et φ^{-1} soient de classe $\mathcal{C}^k$.

Prop : L'application réciproque d'un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.

Prop : La composée de deux $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.

Théorème :

Soit $k\in\mathbb{N}^*\cup\{\infty\}$ et $\varphi:I\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$.

On a équivalence entre :

(i) φ réalise un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme de I vers $J=\varphi(I)$

(ii) φ' ne s'annule pas.

4°) Convexité

Déf : $f:I\to\mathbb{R}$ est convexe ssi $\forall a,b\in I, \forall\lambda\in[0,1], f(\lambda a+(1-\lambda)b)\leq\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$.

Prop : $f:I\to\mathbb{R}$ dérivable est convexe ssi f' est croissante.

V. Intégration

I désigne un intervalle non singulier de $\mathbb{R}$.

1°) Intégrale

Déf : Une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est dite continue par morceaux ssi il existe $a_0=a<a_1<\cdots<a_n=b$ tel que pour tout $i\in\{1,\ldots,n\}$, f est continue sur $]a_{i-1},a_i[$ et admet des limites finies en a_{i-1}^+ et a_i^-.

Une fonction $f:I\to\mathbb{R}$ est dite continue par morceaux ssi elle l'est sur tout segment $[a,b]$ inclus dans I.

Déf : $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est définie pour $f:I\to\mathbb{R}$ continue par morceaux et $a,b\in I$.

Théorème :

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue par morceaux. On a $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\to\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

2°) Primitive

Théorème :

Soit $f:I\to\mathbb{R}$ continue et $a\in I$. Il existe une unique primitive à la fonction f s'annulant en a, c'est $x\mapsto\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Théorème :

Soit $a<b$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue.

Si $f\geq 0$ et $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=0$ alors $f=0$.

Si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=0$ alors f s'annule.

3°) Formules de Taylor

Théorème : (Taylor-Young)

Soit $f:I\to\mathbb{R}$ et $a\in I$.

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ alors f admet un $DL_n(a)$: $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o\left((x-a)^n\right)$..

Théorème : (Taylor-Laplace)

Soit $f:I\to\mathbb{R}$ et $a\in I$.

Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ alors pour tout $x\in I$: $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$.

Théorème : (Taylor-Lagrange)

Soit $f:I\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On suppose que $\exists M\in\mathbb{R},\forall x\in I,\left|f^{(n+1)}(x)\right|\leq M$.

Pour tout $x,a\in I$: $\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right|\leq\frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.

VI. Suites numériques

1°) Limites

Déf : $u_n\to\ell\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N},n\geq N\Rightarrow|u_n-\ell|\leq\varepsilon$.

$u_n\to+\infty\Leftrightarrow\forall A\in\mathbb{R},\exists N\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N},n\geq N\Rightarrow u_n\geq A$.

Théorème : (Césaro)

Si (u_n) est une suite réelle convergent vers ℓ alors $v_n=\frac{u_1+\cdots+u_n}{n}\to\ell$.

Théorème :

Toute suite réelle croissante admet une limite finie ou infinie selon qu'elle est ou non majorée. Dans les deux cas $\lim_{n\to+\infty}u_n=\sup_{n\in\mathbb{N}}u_n$.

2°) Critère de Cauchy

Déf : Une suite réelle (u_n) est dite de Cauchy ssi elle vérifie $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall m,n\geq N,|u_m-u_n|\leq\varepsilon$.

Théorème :

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. On a équivalence entre :

(i) (u_n) est convergente,

(ii) (u_n) est de Cauchy.

3°) Développement asymptotique

Déf : Un développement asymptotique d'une suite est la décomposition de son terme général en somme de termes simples chacun négligeable devant celui qui le précède.

4°) Accélération de convergence

Déf : On dit qu'une suite (v_n) converge plus vite vers ℓ qu'une suite (u_n) ssi $\frac{v_n-\ell}{u_n-\ell}\to 0$.

Théorème :

Si $\frac{u_{n+1}-\ell}{u_n-\ell} \to \alpha \in]-1,1]$ alors (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2}{u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n}$ tend plus vite vers ℓ que la suite (u_n).

VII. Suites récurrentes réelles

1°) Vocabulaire

Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Déf : Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. On appelle suite récurrente d'ordre 1 de fonction itératrice f toute suite $(u_n) \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Prop : (Condition suffisante d'existence)

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{D}$.

Si $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ alors il existe une unique suite $(u_n) \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

2°) Outils d'étude

Pour étudier (u_n) donnée par $u_{n+1} = f(u_n)$:

1) On justifie l'existence de la suite par le résultat qui précède (et on localise u_n)

2) On détermine les limites finies ℓ possibles en passant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ à la limite (ce qui se rapproche de la détermination des points fixes de f)

3) On exploite l'un des outils qui suivent :

Prop : Si $|u_{n+1} - \ell| \leq \rho |u_n - \ell|$ avec $\rho \in [0,1[$ alors $u_n \to \ell$.

Prop : Si $|u_{n+1} - \ell| \leq k |u_n - \ell|^2$ alors $u_n \to \ell$ si u_0 est assez proche de ℓ.

Prop : Si la fonction itératrice f est croissante :

α) Si $f(u_0) - u_0 \geq 0$ alors (u_n) est croissante.

β) Si $f(u_0) - u_0 \leq 0$ alors (u_n) est décroissante.

γ) Si $u_0 \leq \alpha$ avec α point fixe de f alors (u_n) est majorée par α.

δ) Si $u_0 \geq \alpha$ avec α point fixe de f alors (u_n) est minorée par α.

3°) Théorème du point fixe

Théorème :

Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall x \in [a,b], |f'(x)| < 1$.

f admet un unique point fixe α et toute suite récurrente $(u_n) \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ de fonction itératrice f converge vers α.